

ALLES STIMMUNGSSACHE ?!

von Peter GUMMERT, TU BERLIN

Jemand oder etwas kann stimmen oder auch nicht stimmen; man kann abstimmen - für oder gegen etwas stimmen; man kann mitstimmen und zustimmen oder einfach bestimmen; man kann jemanden oder etwas umstimmen oder einfach überstimmen. Man kann etwas anstimmen und auch später einstimmen. Man oder es kann bestimmt oder bestimmend, unbestimmt oder missgestimmt sein. Schließlich kann etwas gestimmt oder verstimmt sein. Hiervon soll im folgenden die Rede sein, wobei das Stimmen auf die Stimmung und das Etwas auf Musikinstrumente bezogen sein soll, zumal derartige Stimmungen der Instrumente die Stimmungen der diese Hörenden zweifellos mitbestimmen. Insofern ist eben vieles Stimmungssache!

Am 1. Institut für Mechanik wird augenblicklich u.a. auch ein Forschungsprojekt bearbeitet, bei dem im Hinblick auf einen Orgelbau in Berlin (Ausbau der EIPHANIEN- Orgel in Berlin-Charlottenburg) neue Wege eines solchen Orgelbaus untersucht werden sollen. Dabei geht es für die weitere Registrierung des Instruments auch um die Möglichkeit, historische Werktreue zu ermöglichen, was wiederum voraussetzt, dass die historischen Stimmungen der jeweiligen Epoche nachempfunden und über Registrierungen auf dem Instrument realisiert werden können. Daraus folgt hier - wie im übrigen auch allgemein feststellbar - ein steigendes Interesse an der Aufarbeitung und der Kenntnis der physikalischen Grundlagen, die dem Problem der Stimmung von Tasteninstrumenten seit Jahrhunderten eigen sind.

Einleitendes

Zunächst sei gesagt, dass es hier nicht um die absolute Stimmung - also um die Tonhöhe - geht. Die Entwicklung des absoluten (Kammer-)Tons - oder sollte man sagen: der modische Trend, diese absolute Bezugstonhöhe immer weiter nach der Devise: (Zitat von Orchestermitgliedern) "Lieber zu hoch als falsch!" nach oben zu verschieben, bleibe hier außer Betracht. Das werde nur dadurch kommentiert, dass es in der Barockzeit bereits Orgeln gab, die im "Chorton" gestimmt waren, der bis zu einer großen Terz gegenüber dem heutigen Kammerton höher lag und dass auch mit Stimmpfeifen aus der MONTEVERDI- Zeit in Italien beweisbar ist, dass die Tonhöhe zu anderen Zeiten unterschiedlich war, nicht zwangsweise immer höher werden muss und im übrigen an den natürlichen Grenzen der menschlichen Stimme (Subbass C₂, der gleichzeitig tiefster Orgelton ist bzw. dem hohen Sopranisten-Diskant c''') festgemacht werden könnte. Schließlich will die Gemeinde die Choräle auch noch mitsingen können, ohne dass sie (Zitat PRAETORIUS (1619): "in der Höhe hinausrufen und schreyen muss!" oder der Organist künftig diese zu transponieren hat. Nachdem in der Mitte des vorigen Jahrhunderts der PARISER KAMMERTON mit a₁ = 435 Hz festgelegt worden war und er vor Jahren nun auf a₁ = 440 Hz festgesetzt worden ist, sollte man damit leben können und den augenblicklichen Trend zu 450 Hz nicht mitgehen, zumal man zwar ein Streichinstrument durch Drehen an den wenigen Wirbeln und ein Blasinstrument durch Absägen relativ schnell, aber ein Klavier mit fast 300 Saiten oder gar eine Orgel mit 10.000 Pfeifen (Orgel des Doms zu Passau) nur unverhältnismäßig schwieriger auf die veränderten Tonhöhen "umstimmen" kann.

Somit verbleibt die Problematik der relativen Stimmung, also die Festlegung der Intervalle zwischen den einzelnen Tönen im Hinblick auf polyphone Musik, also deren Konsequenz auf Harmonik und Intonation.

RELATIVE STIMMUNGEN

Grundlegendes

Stimmungen müssen gesehen werden unter dem Aspekt der

1. Polyphonie
2. Harmonik
3. Chromatik
4. Intonation

ad 1) POLYPHONIE

Solange man monophone Musik praktiziert, ist die Frage der "richtigen" oder "instrumental sinnvollen" relativen Stimmung von untergeordneter Bedeutung, zumindest im Rahmen der im folgenden diskutierten, mehr oder weniger dicht benachbarten Stimmungen. Bei einstimmiger Musik klingen alle Stimmungen schlüssig und überzeugend, zumal dann, wenn man sich von "gewohnten" oder "erlernten" Konventionen und von dogmatischen Regeln, wie eine Quint, Quart oder Terz zu klingen hat, freimacht. Das ist auch der Grund dafür, dass sich Stimmungen aus dem Altertum verbunden mit meist einstimmiger Musik über eine lange Zeit (Jahrtausend) gehalten haben. Die den Griechen zugeschriebenen Stimmungen bzw. daraus entwickelten Kirchentönen: Dorisch, Lydisch, Mixolydisch und Phrygisch sind Beispiele dafür. Erst mit der Hinzunahme weiterer Instrumente, die ein ihnen spezifisches Stimmverhalten (Blechblasinstrumente) haben oder der Erweiterung des Musikcharakters in Richtung Polyphonie auf weiterentwickelten Tasteninstrumenten wird die Frage der relativen Stimmungen von zu lösender Dringlichkeit, denn Melodik wird erweitert um die

ad 2) HARMONIK

Mit der Entwicklung von Tonika, Dominante, Subdominante etc. als "trias musica" (Dreiklang) aufbauend auf der Oktave, Quint, Quart und später unter Einbeziehung der Terz wird die Intervallproblematik deutlich. Dur- Dreiklänge klingen nun in einzelnen Tonarten "harmonisch" bzw. "konsonant", in anderen "disharmonisch" bzw. "dissonant". Die Intervalle haben deutliche Rückwirkungen auf die "musikalische Brauchbarkeit" einer Tonart und der verwendeten und verwandten Akkorde.

ad 3) CHROMATIK

umfasst die Möglichkeit und den verständlichen Wunsch, in allen Tonarten Musik praktizieren zu können, wobei - im richtig verstandenen Sinn der Chromatik - verschiedene Tonarten auch verschiedene Charakter haben können und sollen. Es kann und soll also "warme" bzw. "kalte" musikalische Farben, es soll spitze bzw. dumpfe, festliche bzw. traurige usw. Tonarten geben. Es ist ein verbreiteter Irrtum, dass mit Einführung der äquidistanten, sog. gleichstufig temperierten Stimmungen (s. später), die Chromatik erst möglich geworden ist. Hier wird die Transponierbarkeit in alle 24 Tonarten mit Chromatik verwechselt. Eine solche Stimmung macht zwar das gleiche Stück in allen Tonarten gleichermaßen spielbar, aber wegen der stets äquidistanten Intervalle auch nur in einem Charactersinne, also quasi - unabhängig von den jeweiligen Tonarten, die sich somit nur noch um die (ohnehin fragliche) absolute Tonhöhe unterscheiden - nur in einer musikalischen Farbe. Mono- Chromatik ist aber sicher nicht die wünschenswerte und mögliche Gesamtheit einer Chromatik.

ad 4) INTONATION

ist im wesentlichen psychologisch und physiologisch bedingt, wird vom Musiker und vom Hörer individuell beurteilt. Hier gibt es kein "richtig" oder "falsch" - bestenfalls statis-

tisch gesehen - gibt es ein "besser" oder "schlechter". Intonation ist subtile Möglichkeit für Werk und Interpretation und entzieht sich so gesehen allein physikalischer Behandlung und Beurteilung. Dennoch hat die Intonation eine recht konkrete Bedeutung für die Stimmungen, denn die Tonfolge muss auf das Instrument umsetzbar sein, d.h. die Töne müssen auf dem jeweiligen Instrument überhaupt vorhanden bzw. spielbar sein (bei Blasinstrumenten z.B. keine Selbstverständlichkeit) und bei Tasteninstrumenten folgt daraus die Notwendigkeit, die Töne aller Stufen einer bestimmten, begrenzten Anzahl von Tasten (12) eindeutig zuzuordnen zu können. Dies stellt eine Forderung dar, die einerseits aufgrund der physikalisch-mathematischen Ergebnisse der Stimmungsreihen und ihrer Praktikabilität für Stimmung und Spielbarkeit des Instruments (es hat daraus resultierende Instrumente mit 20 Tasten und mehr pro Oktave und Stimmung gegeben) und andererseits wegen der Kompatibilität von Tasteninstrumenten mit anderen konzertierenden Instrumenten auf Schwierigkeiten führt, die es stets zu optimieren gilt.

Mathematische Grundlage der Stimmungen sollen im folgenden die Frequenzverhältnisse

$$v_n = \frac{f_n}{f_1}; \quad n \in \mathbb{N} \text{ (natürliche Zahl)}$$

sein, wobei f_1 die jeweils tiefste Frequenz der jeweiligen Oktave ist. Ordnet man diesem tiefsten Ton einer Oktave den Wert "C" (Zentrum) zu, so ist v_n unabhängig von der jeweiligen Oktave und von der absoluten Tonhöhe. $v_N = 2$ bedeutet dann, dass die nächsthöhere Oktavstufe mit doppelter Frequenz erreicht ist, wobei N die Zahl der dazu nötigen Teiltönschritte bedeutet. n als Intervallindex durchläuft alle natürlichen Zahlen N_0 bis zu der natürlichen Zahl $N-1$, wobei nicht alle v_n für die jeweilige Stimmung existieren müssen. Musikalisch-physikalisch gesehen ist $N = 22$ (Oktave eingeschlossen) mit Rücksicht auf theoretische Teiltönschritte eine sinnvolle Festlegung, weil damit jedem der acht "Ganztöne" (C, d, e, f, g, a, h, c) genau ein erhöhter Teilton (C+, d+, e+, f+, g+, a+, h+) und genau ein erniedrigter Teilton (d-, e-, f-, g-, a-, h-, c-) innerhalb einer Oktave zugeordnet wird. 8 Ganztöne und 2×7 Teiltöne erklären dann die Wahl von 22 Teiltönen mit 21 Intervallen für jede Oktave. Die Bezeichnungen c+ bzw. d- usw. sind bewusst so gewählt worden, um sie nicht von vornherein mit den üblichen "Halbtönschritten" $c^\# = cis$ bzw. $d^\flat = des$ usw. zu identifizieren. Die Intonationsmöglichkeit auf klassischen Tasteninstrumenten, für die die Zahl $N_T = 13$ (7 + 1 weiße und 5 schwarze Tasten bzw. umgekehrt) festgelegt ist, erfordert dann eine Zuordnung der Stimmfrequenz $f_n = f_1 \cdot v_n$ aus der Menge der $N = 22$ Töne zu den $N_T = 13$ Tasten. Auf die Möglichkeit, die auch schon vereinzelt realisiert wurde, Tasteninstrumente mit mehr als 13 Tasten, also z.B. mit 17 Tasten pro Oktave in der Form:

C, C+, d-, d, d+, e-, e, f, f+, g-, g, g+, a-, a, a+, h- = b, c

zu bauen, wird hier im Hinblick auf die erlernte Spielbarkeit der Tasteninstrumente und mit Rücksicht auf die verfügbare musikalische Literatur verzichtet.

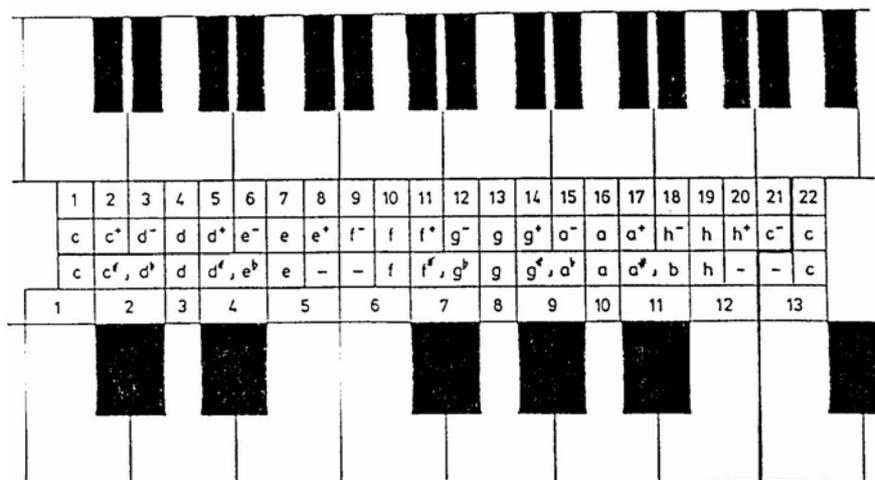


Bild 1

Mit dem Ziel, die einzelnen Stimmungen und deren Intervalle untereinander und insbesondere mit der bekannten, physikalischen (äquidistanten = gleichstufigen) Stimmung vergleichen zu können, bei der die Oktave der 13 Töne in 12 gleiche Intervalle - d.h. gleicher Quotienten (nicht Differenzen) ihrer Frequenzen

$$v = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \sqrt[12]{2} = 1.0595 = \text{const.}$$

eingeteilt ist, wird der Gesamtheit der 12 Intervalle (Oktave) ein logarithmisches Maß

$$(0 + 1) - (0) = \Delta 0 = 1200 \text{ Cent}$$

und wegen der geometrischen Folge, die die Stimmung aufgrund dieses konstanten Frequenzverhältnisses darstellt, jedem der 12 Intervalle der Wert

$$\Delta i = \frac{\Delta 0}{12} = 100 \text{ Cent}$$

zugeordnet. Damit ist die Einheit des Frequenzverhältnisses definiert zu

$$v_C = \sqrt[100]{\sqrt[12]{2}} = \sqrt[1200]{2} = 1.0005778$$

Jede der nachfolgenden Stimmungen wird auf dieses Maß transformiert (jeweils 2. Spalte der Tabelle) und die Abweichung von der physikalischen Stimmung als Differenz in Cent (3. Spalte) ausgewiesen.

Als Transformation ergibt sich aus dem Vorangegangenen, also aus

$$v_n = 2^{\left(\frac{c_n}{1200}\right)} \text{ nach Logarithmierung}$$

$$c_n = 1200 \cdot \frac{\log v_n}{\log 2} = 0$$

Für die Prime ($n = 0, v_0 = 1$) ist somit

$$c_0 = 1200 \cdot \frac{\log 1}{\log 2} = 0$$

und für die Oktave ($n = 12, v_{12} = 2$)

$$c_{12} = 1200 \frac{\log 2}{\log 2} = 1200$$

Damit ist eine genaue Differenzierung der Töne und deren Relation zueinander möglich. Zur Beurteilung der Stimmung (Hörbarkeit) und deren Abweichung von bekannten Stimmungen muss man wissen, dass von einem guten, geschulten musikalischen Gehör Abweichungen von bereits 5 Cent, von einem "normalen" Gehör Abweichungen von 10 Cent und mehr wahrgenommen werden, wobei diese Wahrnehmung steigt, wenn nicht nur der einzelne Ton, sondern dessen Verbund mit anderen Tönen (Intervall- Harmonik mit Terz, Quint usw.) gehört wird.

Der Historie folgend sollen nun authentische und mögliche relative Stimmungen im einzelnen betrachtet, berechnet und verglichen werden, wobei mit der Musik des Altertums und hierbei wiederum mit den griechischen Tonfolgen, die sich bis ins Mittelalter gehalten haben, begonnen werde:

1. PHYTHAGOREISCHE STIMMUNGEN

Es ist bis heute nicht genau bekannt, wie die griechischen Saiten- und Blasinstrumente und die erste Orgel, die griechische "hydraulis" und später: "organon hydraulicon" (3. Jh. v. Chr.) - das waren mit Luft, die unter konstanter Wassersäule stand, betriebene Orgeln mit 7 bzw. später 8 Tönen - relativ gestimmt waren. Man ist dabei auf eine Reihe von Annahmen angewiesen, die, sofern sie keine reinen Spekulationen sind, sich aus Wort und Bild dieser Zeit ableiten.

1.1 PYTHAGOREISCH NUR- QUINTISCH

Da mathematische Grundlagen und akribische Beschäftigung mit Kunst, hier speziell Musik vorausgesetzt werden können, kann auch davon ausgegangen werden, dass die Oktave mit dem Frequenzverhältnis $v = 2.0$ (Mitschwingen von Saiten als 1. Oberton mit doppelter Frequenz) bekannt war und verwendet wurde. Im gleichen Sinne als 2. Oberton mit dreifacher Frequenz ($v=3$) kann wohl auch die Supra- Quinte (Duodezime) vorausgesetzt werden, zumal sie damit 3. Ton in der sog. Naturton- Reihe ist (s. dort). Die Supra- Quinte wird nun als Folge der Forderung $1 \leq v \leq 2$ reoktaviert, d.h. durch den Faktor 2 dividiert, was zum Quintenverhältnis $v_{\text{Quint}} = 3/2 = 1.5$ führt. Eine solche Quinte stellt eine reine Quinte dar. Die auf Bildern dokumentierte etwa gleiche Länge der Saiten z.B. einer Lyra und die Darstellung der hydraulis legen den Schluss einer erfolgten Reoktavierung nahe und sprechen zusammen mit dem Zweifel, dass es zu jener Zeit möglich war, Saiten mit einem Vielfachen des Massendichtenverhältnis und/oder eine entsprechende Vorspannung zu erzeugen, gegen die Stimmung in Supra- Quinten. Setzt man das Verfahren fort, so erhält man als Supra- Quinte der reinen Quinte

$$v = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

und nach entsprechender Reoktavierung ($v \leq 2$)

$$v = \frac{9}{8} = 1.1250$$

Entsprechend wird die n-te reine Quinte der Tonreihe mit $v_n = (3/2)^n$ generiert. Eine Zuordnung zu "Notennamen" und zu entsprechenden Tasten eines Instrumentes bleibt nun solange offen, bis eine Periodizität dieser Generierung festgestellt ist. Dann können die Verhältnisse v_i der Größe nach geordnet werden und somit die Namensgebung der Tonhöhe entsprechend erfolgen.

Man erhält auf diese Weise die in Tab. 1 aufgelistete Stimmung, die folgerichtig dann die nur- quintische pythagoreische Stimmung darstellt (vgl. auch Bild 2).

Allerdings stellt sich dabei heraus, dass zwar eine Periodizität nach 12 Quinten $(3/2)^{12}$ in 7 Oktaven (2^7) erreicht ist, aber nicht im exakten Sinne, da zwar

PYTHAGOREISCH NUR- QUINTISCH

Tabelle 1

	Intervall	Cent	C-Diff/Temp
C	1.0000	0	0
C+	1.0678	114	14
D-	---	---	-
D	1.1250	204	4
D+	1.2013	318	18
E-	---	---	-
E	1.2656	408	8
E+	1.3515	521	X
F-	---	---	-
F	---	---	-
F+	1.4238	612	12
G-	---	---	-
G	1.5000	702	2
G+	1.6018	816	16
A-	---	---	-
A	1.6875	906	6
A+	1.8020	1020	20
H-	---	---	-
H	1.8984	1110	10
H+	2.0272	1223	X
C-	---	---	-
C	2.0000	1200	0

PYTHAGOREISCH NUR- QUARTISCH

Tabelle 2

	Intervall	Cent	C-Diff/Temp
C	1.0000	0	0
C+	---	---	-
D-	1.0534	90	-10
D	1.1098	180	-20
D+	---	---	-
E-	1.1851	294	-6
E	1.2485	384	-16
E+	---	---	-
F-	---	---	-
F	1.3333	498	-2
F+	---	---	-
G-	1.4046	588	-12
G	1.4798	678	-22
G+	---	---	-
A-	1.5802	792	-8
A	1.6647	882	-18
A+	---	---	-
H-	1.7777	996	-4
H	1.8728	1086	-14
H+	---	---	-
C-	1.9730	1176	X
C	2.0000	1200	0

$(3/2)^{12} = 129.7463 = H+$, aber

$2^7 = 128 \hat{=} C$

ist, also so eine Abweichung nach einem Zyklus (Quintenzirkel) von

$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.01364 = 23,5 \text{ Cent}$

auftritt. Diese Abweichung stellt das "pythagoreische Komma" dar.

Da nun nach 12 Quinten als Ausgangston für die nächste Oktave wieder C (1200 Cent) und nicht H+ (1223 Cent) erreicht werden soll und ein H+ auf klassischen Tasteninstrumenten ohnehin nicht existiert, sind nur 11 der 12 Quinten als reine Quinten intonierbar (Bild 2). Das letzte Quint-Intervall E+ (Taste F) -C hat statt dem Verhältnis $v = 1,5 = 702 \text{ Cent}$ dann nur noch ein Verhältnis $v = 1,4793 = 679 \text{ Cent}$. Die Differenz $(702 - 679 = 23)$ ist dann wieder das pythagoreische Komma. Diese Abweichung ist derart groß und hörbar, dass ein an temperierte Stimmung gewöhntes Ohr die Verwendung des Intervalls als "falsch" empfindet und von daher der Gebrauch von Tonarten, in dem dieses Intervall auftritt, eingeschränkt ist.

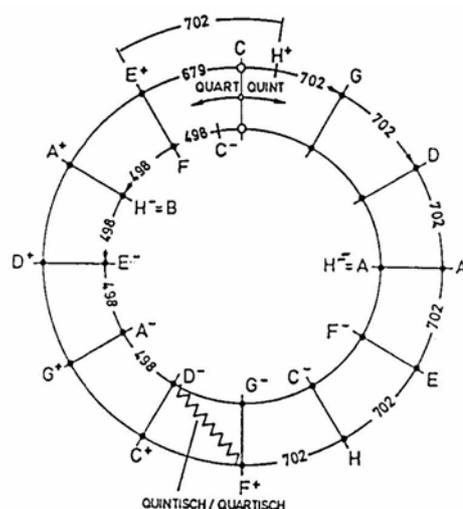


Bild 2

Man kann also nicht in allen 24 Tonarten gleichermaßen musizieren. Dagegen sind die Terzen, die sich nach jeweils 4 aneinandergereihten reoktavierten Quinten als pythagoreische Terzen ergeben, zwar gegenüber temperierten Terzen, die am stärksten vergrößerten, aber als solche noch musikalisch brauchbare Großerzen.

1.2 PYTHAGOREISCH NUR- QUARTISCH

Bei prinzipiell gleichem Vorgehen, jedoch mit dem Unterschied, dass nicht der Folgeton die reine Quint des Ausgangstons, sondern der Ausgangston die reine Quint des Folgetons (Abwärts-Quint) ist, kommt man zur pythagoreisch nur- quartischen Stimmung. Hat also der n -te Ton das Verhältnis v_n , so hat $(n + 1)$. Ton das Verhältnis

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} v_n$$

mit der Nebenbedingung $1 \leq v_n \leq 2$, was ggf. wieder mit einer Reoktavierung (hier Multiplikation mit 2) verbunden ist. Die entsprechenden Intervalle sind wieder reine Quinten ($3/2$) vom Folgeton aus, sie sind Quartan ($4/3$) vom Ausgangston aus. Dennoch gelangt man zu einer völlig anderen Stimmung, bei der kein einziger Ton (außer dem beliebigen Zentrum C) mit der nur- quintischen Stimmung übereinstimmt (vgl. Tab. 2 bzw. Bild 2). Die sich jeweils nach 8 reoktavierten Quartan ergebenden Terzen sind hierbei nicht so stark überschwebend wie die nur- quintischen und damit den temperierten Terzen ähnlicher. Der 12. Ton der Folge ist auch hier wieder starkabweichend von der 7. Oktave, und zwar um -22 Cent. Da das dann gerade das Intervall $D^{bb} - A^{bb}$, d.h. bei Übersetzung auf Tasteninstrumente das Intervall C - G betrifft, engt das die musikalische Verwendung der Zentrumstonarten erheblich ein.

1.3 PYTHAGOREISCH QUINTISCH- QUARTISCH

Man kann diesem Umstand abhelfen, indem man C als wahres Zentrum auffassend, 6 bzw. 5 reine Quinten nach der nur- quintischen Stimmung und 5 bzw. 6 Quartan nach der nur- quartischen Stimmung generiert. Man erhält dann mit (F+) - (D-) bzw. mit (H) - (G-) die musikalisch fragwürdigen Quinten aufgrund des pythagoreischen Kommas. Die Zentrumstonarten werden jedoch dadurch besser spielbar, da z.B. mit G - H - D eine pythagoreische Großterz und eine reine Quinte den trias musica (G-Dur) bilden. Die Stimmung ist in Tab. 3 im einzelnen aufgeführt. Zahlreiche Folgerungen hinsichtlich Harmonik und Intonation sind aus den tabellierten Stimmungsreihen ableitbar, aber aus Platzgründen hier nicht darstellbar.

2. NATURTON-REIHE

Nimmt man die Töne eines ventillosen Blasinstrumentes oder die Obertonreihe einer entsprechenden Orgelpfeife als Einzeltöne und ordnet sie der Größe nach unter Berücksichtigung der Oktavverhältnisse $1, 2, 4, \dots, 2^k$, so kommt man zu einer weiteren Stimmungsfolge der natürlichen Stimmung oder Naturton- Reihe. Das bedeutet rechnerisch die Bildung der ganzzahligen Vielfachen eines beliebigen Tones und eine entsprechende Reoktavierung wegen $1 \leq v_n \leq 2$, also

$$v_n = \frac{n}{2^j} \quad n \in \mathbb{N}; \quad j \in \mathbb{N}_0$$

Man erhält somit unter Berücksichtigung der Wiederholungen für die ersten neun Naturtöne (Bild 3):

PYTHAGOREISCH QUINT./QUART.

Tabelle 3

	Intervall	Cent	C-Diff/Temp
C	1.0000	0	0
C+	---	---	-
D-	1.0534	90	-10
D	1.1250	204	4
D+	---	---	-
E-	1.1851	294	-6
E	1.2656	408	8
E+	---	---	-
F-	---	---	-
F	1.3333	498	-2
F+	1.4238	612	12
G-	1.4046	588	-12
G	1.5000	702	2
G+	---	---	-
A-	1.5802	792	-8
A	1.6875	906	6
A+	---	---	-
H-	1.7777	996	-4
H	1.8984	1110	10
H+	---	---	-
C-	---	---	-
C	2.0000	1200	0

NATURTON-REIHE

Tabelle 4

	Intervall	Cent	C-Diff/Temp
C	1.0000	0	0
C+	---	---	-
D-	(1.0625)	104	4
D	1.1250	203	3
D+	(1.1875)	297	-3
E-	---	---	-
E	1.2500	386	-14
E+	---	---	-
F-	---	---	-
F	(1.3125)	470	-30
F+	1.3750	551	-49 !
G-	---	---	-
G	1.500	702	2
G+	(1.5625)	772	-28
A-	---	---	-
A	1.6250	840	-60 !
A+	---	---	-
H-	1.7500	968	-32
H	1.8750	1088	-12
H+	---	---	-
C-	---	---	-
C	2.0000	1200	0

n =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
j =	0	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
v =	1	2	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	2
NATUR TON NR.	1.	2.	3.	"	4.	"	5.	"	6.	"	7.	"	8.	"	9.	"
											(#)			b	b	e

Bild 3

Man erkennt, dass als 2. Naturton die Oktave, als dritter die reine Quinte, als vierter eine "reine" Terz, als fünfter die "kleine Septime", als sechster die "große Sekunde" und als siebenter eine (übergroße) Quart bzw. stark verminderte Quinte anfallen. Die für die klassische Tastatur von 13 Tasten bedeutsame Naturton- Reihe bis zum 13. Ton ist in Tab. 4 aufgeführt. Musikalisch klingt diese Reihe in einigen Tonarten sehr vollkommen, da sie sowohl die reine Terz als auch die reine Quinte enthält. Jedoch ist die verminderte Quinte mit -49 Cent gegenüber F[#] bzw. übermäßige Quarte F+ mit 51 Cent gegenüber F ein problematischer Halbton, der genau zwischen den temperierten Tönen F und F[#] liegt und daher relativ zu Gehörtem und Üblichem, quasi als Viertelton, völlig "aus der Reihe" fällt.

Die Konsequenz für die Interpretation musikalischer Literatur ist offensichtlich - ebenso folgt daraus die herausragende Stellung beispielsweise von Orgel- Trompeten- Konzerten in C-Dur oder D-Dur, wobei auf Trompeten nur Naturtöne spielbar waren und diese nur zur Ehre Gottes oder bei besonderen Festlichkeiten des höchsten Landesfürsten eingesetzt werden durften. Damit verbunden war die gesellschaftliche Stellung der Naturton- Instrumentalisten (Trompeter) gegenüber anderen Musikern deutlich zum Besseren abgehoben.

3. "REINE" STIMMUNGEN

Basierend auf der Naturton- Reihe und gefördert durch die Philosophie des 16. und 17. Jahrhunderts, in der Einfachheit und Klarheit als Maß für die Vollkommenheit und dies wiederum als Qualität, als System und als Erklärung der göttlichen Schöpfung verstanden wurde, versuchte man, auch die Musik in dieser Einfachheit zu gestalten. So werden die Intervalle im Sinne einer Proportionslehre mit möglichst einfachen, ganzzahligen Verhältnissen aufgebaut: Die Oktave mit 1:2, die Quinte (wie in 1. und 2.) mit 2:3, die Quarte (wie in der pythagoreisch nur- quartischen Stimmung) mit 3:4 und die inzwischen (vgl. 2., Naturton-Reihe) gefundene reine Terz mit 4:5. Der damit entstehende Dur- Dreiklang (Prime- Terz- Quinte) gehorcht nun dem Zahlenverhältnis 4:5:6 und besteht darüber hinaus nur aus reinen Intervallen. Was ist also nahe liegender, als dieses System als Ausdruck von (KEPLER:) "Sphärenharmonie" oder Symbol der göttlichen Dreifaltigkeit als das perfekte, erstrebenswerte und einzig mögliche anzusehen, zumal derartige Strukturen auch in alle anderen Bereiche der Kunst, Literatur und Architektur übernommen werden. Das Magische der Zahlen und deren Symbolik findet sich noch bis ins BACHsche Werk, wenn auch dort kunstvoll verschlüsselt und bereits in Kenntnis, dass auch dieses Tonsystem zwar seine spezifischen Möglichkeiten und seine eigenwillige Chromatik hat, aber in seiner Musikalität auch nicht generell ist. Denn wählt man wieder C als Zentrumstonart und stimmt darauf die reine Terz (E = 5/4) und die reine Quinte (G = 3/2) als Töne des C-Dur Akkords und baut nun die verwandten (benachbarten) Zentrumstonarten G-Dur als Dominante und F-Dur als Subdominante (vgl. Bild 2 bzw. 4) in gleicher Weise, also in der dem Quintenzirkel folgenden Form G-H-D bzw. F-A-C auf, so liegen diese Töne und insbesondere damit das Intervall D-A fest. Für D ergibt sich wegen Quint x Quint: $(3/2)^2 = 9/8 = 1.1250$ und für A wegen Quart x Terz: $(4/3)(5/4) = 20/12 = 5/3 = 1.6666$ und somit als Intervall- Verhältnis D-A

$$v = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{9}{8}} = \frac{40}{27} = 1.4815$$

Das ist aber nicht das für den Aufbau der nächsten Dur- Harmonie, also von D- Dur (D-F[#]-

A) benötigte Quint- Intervall $(D-A)' = 3/2$, sondern es stellt eine unterschwebende Quinte, eine sog. "Wolfsquinte" dar. Damit ist schon die parallele Moll- Tonart von F, also D- Moll und die Dominante von G, also D- Dur nicht mehr rein intonierbar. Die Reinheit ist nur auf einige wenige Tonarten beschränkt. Mit anderen Worten ist es also nicht möglich, in ein reines Terz- Intervall $(5/4)$ vier gleichgroße, reine Quinten $(3/2)$ (rektaviert) hineinzulegen, sondern es bleibt eine Diskrepanz mit dem Wert

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{81}{64}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{81}{64}}{\frac{80}{64}} = \frac{81}{80} = 1.0125 = 21.6 \text{ Cent}$$

REINE STIMMUNG, SYNTONISCH

Tabelle 5

	Intervall	Cent	C-Diff/Temp
C	1.0000	0	0
C+	1.0416	71	-29
D-	---	---	-
D	1.1250	204	4
D+	---	---	-
E-	1.2000	316	16
E	1.2500	386	-14
E+	---	---	-
F-	---	---	-
F	1.3333	498	-2
F+	1.4062	590	-10
G-	---	---	-
G	1.5000	702	2
G+	1.5625	773	-27
A-	---	---	-
A	1.6666	884	-16
A+	---	---	-
H-	1.7500	1018	18
H	1.8750	1088	-12
H+	---	---	-
C-	---	---	-
C	2.0000	1200	0

REINE STIMMUNG, DIATONISCH

Tabelle 6

	Intervall	Cent	C-Diff/Temp
C	1.0000	0	0
C+	---	---	-
D-	1.0666	112	12
D	1.1250	204	4
D+	---	---	-
E-	1.2000	316	16
E	1.2500	386	-14
E+	---	---	-
F-	---	---	-
F	1.3333	498	-2
F+	1.4062	590	-10
G-	---	---	-
G	1.5000	702	2
G+	---	---	-
A-	1.6000	814	14
A	1.6666	884	-16
A+	---	---	-
H-	1.7777	996	-4
H	1.8750	1088	-12
H+	---	---	-
C-	---	---	-
C	2.0000	1200	0

Diese Diskrepanz heißt "syntonisches Komma". Es ist mit rd. 22 Cent etwas kleiner als das pythagoreische Komma, nämlich um den Faktor

$$\frac{\text{pyth. Komma}}{\text{synt. Komma}} = \frac{1.01364}{1.01250} = 1.001126 = 2 \text{ Cent} ,$$

den man als "Schisma" bezeichnet. Das Schisma entzieht sich damit der normalen Hörbarkeit, jedoch ist das für die reinen Stimmungen bedeutsame syntonische Komma ein unüberhörbarer, dissonanter "Orgelwolf". Die reinen Stimmungen sind in Tabelle 5 bzw. 6 enthalten, wobei die reine syntonische Stimmung von C beginnend, dem Quintenzirkel im Uhrzeigersinne (quintisch) folgend für die #- Tonarten berechnet ist (Tab. 5), während die diatonische Stimmung von C beginnend und wie oben beschrieben, immer alternierend für Dominante (im Uhrzeigersinn) und Subdominante (Quartenzirkel) (entgegen dem Uhrzeigersinn) berechnet ist. Es ergeben sich verschiedene Stimmungen, in denen jeweils eine bestimmte Anzahl von Dur- Tonarten vollständig rein, andere teilweise rein (reine Terzen oder reine Quinten) und jeweils zwei Tonarten überhaupt keine reinen Intervalle haben und die Wolfsquinte enthalten. Enharmonische Verwechslungen sind ausgeschlossen, da jeder Ton eindeutig ist ($F^\# \neq G^b$).

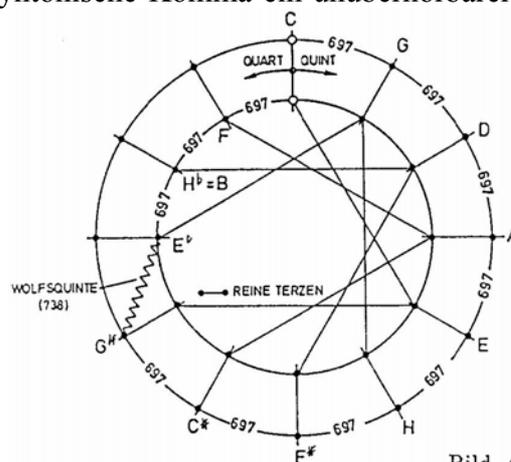


Bild 4

4. MITTELTÖNIGE STIMMUNGEN

Nachdem feststand, dass reine Stimmungen auf Tasteninstrumenten nicht bzw. nur für bestimmte Tonarten umsetzbar waren und auf der anderen Seite Natur- Blasinstrumente nach reinen Intervallen verlangten, wurde die mitteltönige Stimmung entwickelt. Sie verzichtet auf die Forderung von reinen (pythagoreischen) Quinten zugunsten von (möglichst vielen) reinen Terzen. Unterstützt wird dieses Prinzip durch die Eigenschaft des Ohres, eine unreine Quinte nicht als solche zu empfinden, solange die wohlklingende Natur- Terz als Bestandteil eines Dur-Akkords enthalten ist. Um zu erreichen, dass die großen Terzen rein sind, müssen die Quinten entsprechend temperiert, d.h. in diesem Falle relativ stark verkleinert werden. Der Wert ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass nun vier temperierte Quinten reoktaviert die reine Natur- Terz ergeben müssen, also

$$v_{\text{Terz}} = \frac{5}{4} = 1.2500 \quad (.2^j)$$

$$v_{\text{Quint}} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 1,25} = \sqrt[4]{5} = 1.49535 = 697 \text{ Cent}$$

Die Quint ist also mit 697 Cent gegenüber der reinen Quint von 702 Cent um hörbare 5 Cent verkleinert. Ausgehend von C liegen damit die Terz (E) sowie die darin enthaltenen 4 Quinten C, G, D, A, E fest. Fordert man nun, dass auch G, D und A jeweils reine Terzen der entsprechenden Ausgangstöne sind, so werden damit E^b, B^b und F festgelegt. Das Verfahren wird fortgeführt, bis durch die Periodizität des Quintenzirkels alle 12 Töne (des klassischen Tasteninstrumentes) bestimmt sind (Tab. 7). Man erhält derart elf gleiche Quinten E^b bis G[#]

(vgl. Bild 4) und jeweils nach 4 Quinten die vorausgesetzten 8 reinen Terzen E^b-G, B^b-D, F-A, C-E, G-H, D-F[#], A-C[#], E-G[#]. Die restlichen 4 Terzen H-E^b, F[#]-B^b, C[#]-F, G[#]-C sind Wolfsintervalle und musikalisch problematisch. Die 12. Quinte G[#]-E^b ist wieder eine Wolfsquinte (vgl. Bild 4) mit 738 Cent (reine Quint: 702 Cent). Das schließt den Gebrauch von G[#]-Dur wegen der Wolfsquinte und die Verwendung von H, F[#] und C[#]-Dur wegen der Terz aus, was sich hinsichtlich der Komposition von Werken in diesen Tonarten auch ausgewirkt hat.

Die Stimmung heißt mitteltönig, weil als ein Ergebnis der oben beschriebenen Generierung die großen Sekunden (z.B. C-D bzw. D-E) durch die Temperierung C - G - D - A - E in 4 gleichen Quinten genau gleich ist, also quasi die reine Terz C-E durch den Ton D halbiert (gemittelt) wird. Demzufolge gibt es hier keinen großen und kleinen Ganzton wie bei der reinen Stimmung, bei der, der Proportionslehre folgend, das Verhältnis 8:9:10, also C-D = 9/8 = 1.1250 bzw. E-D = 10/9 = 1.1111 ist, sondern beide Ganztöne haben das gleiche Verhältnis und sind damit gleichgroß. Die Halbtöne dagegen sind verschieden groß, woraus die mitteltönige Stimmung ihre bunte Toncharakteristik z.B. bei chromatischen Durchgängen bezieht. Im übrigen klingt die Stimmung durch die reinen Terzen sehr harmonisch und weich, wenn man sich wieder einmal von den gewohnten höheren temperierten Terzen unserer heutigen Stimmung (lieber zu hoch als falsch!) freimacht. Bis zum Ende des 17. Jahrhunderts war dann auch die mitteltönige Stimmung die für alle Orgeln maßgebliche Stimmung und noch heute gibt es einige wenige Orgeln, die derart intoniert sind.

MITTELTÖNIGE STIMMUNG

Tabelle 7

	Intervall	Cent	C-Diff/Temp
C	1.0000	0	0
C+	1.0449	76	-24
D-	---	---	-
D	1.1180	193	-7
D+	---	---	-
E-	1.1963	310	10
E	1.2500	386	-14
E+	---	---	-
F-	---	---	-
F	1.3375	503	3
F+	1.3975	579	-21
G-	---	---	-
G	1.4953	697	-3
G+	1.5625	773	-27
A-	---	---	-
A	1.6719	890	-10
A+	---	---	-
H-	1.7889	1007	7
H	1.8692	1083	-17
H+	---	---	-
C-	---	---	-
C	2.0000	1200	0

GLEICHSTUFIG TEMPERIERT

Tabelle 8

	Intervall	Cent	C-Diff/Temp
C	1.0000	0	0
C+	1.0594	100	0
D-	1.0594	100	0
D	1.1224	200	0
D+	1.1892	300	0
E-	1.1892	300	0
E	1.2599	400	0
E+	---	---	-
F-	---	---	-
F	1.3348	500	0
F+	1.4142	600	0
G-	1.4142	600	0
G	1.4983	700	0
G+	1.5874	800	0
A-	1.5874	800	0
A	1.6817	900	0
A+	1.7817	1000	0
H-	1.7817	1000	0
H	1.8877	1100	0
H+	---	---	-
C-	---	---	-
C	2.0000	1200	0

5. GLEICHSTUFIG-TEMPERIERTE STIMMUNGEN

Mit dem Verzicht auf reine Quinten und deren Temperierung war mit der mitteltönigen Stimmung bereits schon eine mögliche temperierte Stimmtönereihe entwickelt. Jedoch ist bei ihr die Wolfsintervallproblematik und die daraus folgende Unmöglichkeit, in allen Tonarten akzeptabel zu musizieren, nicht gelöst. Offenbar ist dies nur möglich, wenn man auch noch auf die Forderung nach reinen Terzen (wieder) verzichtet und auch diese temperiert. Am einfachsten geschieht das dadurch, indem man das Oktavintervall mit seinen (klassisch: 12) Intervallen aequidistant temperiert - man kommt so zur physikalischen oder gleichstufig-temperierten Stimmung mit den Intervallverhältnissen

$$\Delta i = \sqrt[12]{2} = 1.0594 = 100 \text{ Cent}$$

bei den Frequenzverhältnissen für den n-ten Teilton (Tabelle 8)

$$v_n = \sqrt[12]{2^n} ; 1 \leq v_n \leq 2, n \in \mathbb{N}_0$$

Der Definition des Cents entsprechend haben sämtliche Teiltöne n den Wert 100 n. Sie bilden die Vergleichszahlen zu allen anderen Stimmungsreihen (Reihe 3 der Tabellen 1 bis 12). Die vergrößerten Halbtöne (z.B. C+) werden dadurch mit den verkleinerten Halbtönen (z.B. D-) identisch ($C^\# = D^b$), alle Intervalle gleichgroß (100 Cent), alle Tonarten sind gleichermaßen spielbar, jedoch gibt es keine Tonartcharakteristik; sie ist monochromatisch, alle Tonarten klingen gleich, keines der Intervalle ist rein und außer der Oktave ist kein Ton einer der Naturton-Reihe. Die Quinten sind unterschwebend und kein Ton (außer dem Stimmtone) stimmt mehr mit dem eines "natürlichen" Musikinstrumentes überein und zu ihrer exakten Intonation auf einem Tasteninstrument bedarf es einer elektronischen Stimmhilfe, da jegliche Orientierung für den Stimmer oder Intonateur anhand reiner (schwebungsfreier) Intervalle genommen ist.

Anlässlich dieser Nachteile, insbesondere des Verlustes der Chromatik ist es erstaunlich, dass die gleichstufig-temperierte Stimmung eine solche Verbreitung in unserer Zeit gefunden hat. Schließlich sind mehr oder weniger alle Stimmungen temperiert, da es nicht gelingt, ein vollständiges Tonspektrum allein auf Naturtöne und/oder reine Intervalle aufzubauen (s.o.), insofern ist aber auch die gleichstufige Temperierung nicht die einzige temperierte Stimmung und so gesehen ist sie sogar die ärmlichste unter allen temperierten Stimmungen. Nicht erstaunlich ist es daher, dass es Musiker und Intonateure gibt, die versuchen, wieder Farbe, Vielfalt und Charakteristiken in das Tonartenspektrum durch geeignete temperierte Stimmungen zu bringen. Ein Beispiel

GLEICHSTUFIG 5 / 25 (STOCKHAUSEN)

Tabelle 9

	Intervall	Cent	C-Diff/Temp
C	1.0000	0	0
C+	1.0665	111	11
D-	---	---	-
D	1.1374	222	22
D+	1.2130	334	34
E-	---	---	-
E	1.2937	445	45
E+	---	---	-
F-	---	---	-
F	---	---	-
F+	---	---	-
G-	---	---	-
G	1.3797	557	-43
G+	1.4715	668	-32
A-	1.5693	780	-20
A	1.6737	891	-9
A+	---	---	-
H-	1.7850	1003	3
H	1.9037	1114	14
H+	---	---	-
C-	---	---	-
C	2.0302	1225	25
c+	---	---	-
d-	2.1652	1337	37
d	2.3092	1448	48
d+	---	---	-
e-	---	---	-
e	2.4628	1560	-40
e+	---	---	-
f-	---	---	-
f	2.6265	1671	-29
f+	2.8012	1783	-17
g-	---	---	-
g	2.9874	1894	-6
a-	3.1861	2006	6
a	3.3980	2117	17
h-	3.6239	2229	29
h	3.8649	2340	40
c+	4.1219	2451	-49
d	4.3959	2563	-37
d+	4.6883	2674	-26
e	5.0000	2786	-14

für eine derartige gleichstufige Stimmung aus unserer Zeit ist die von STOCKHAUSEN für seine Komposition "Studie II" (1954) vorgeschlagene gleichstufige Intervallskala 5-25, die das Frequenzverhältnis $v = 5.0$, also das $2 \frac{1}{4}$ - Oktavintervall (C - e') in 25 äquidistante Intervalle von der Größe

$$\Delta_i = 5^{\frac{1}{25}} = 1.0665 = 111 \text{ Cent}$$

teilt. Die sich daraus ergebende Tonfolge

$$v_n = \sqrt[25]{5^n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ist in Tabelle 9 berechnet. Sie hat keine reinen Intervalle mehr, nicht einmal eine "reine" Oktave ($v=2$). Ihre Umsetzung auf klassische Manuale ist problematisch, da für einzelne Tasten keine Töne der Stimmreihe existieren bzw. mit anderen Worten mehr Tasten zwischen C - e' zur Verfügung stehen als Töne innerhalb der Stimmung vorhanden sind. Will man diesem formalen Aspekt Rechnung tragen, so bietet sich eine gleichstufige Stimmung 5 - 28 mit $\Delta i = 5^{1/28} = 1.0592 = 99.5$ Cent an, wodurch alle 29 Tasten, allerdings auch ohne reine Oktaven, belegbar wären.

6. WOHL-TEMPERIERTE STIMMUNGEN

sind ungleichstufig-temperierte Stimmungen mit Tonartencharakteristik (Chromatik). Die ersten, die das nachweislich versucht haben, waren WERCKMEISTER (1691), J.S. BACH (1722) und später KIRNBERGER (1779). Es ist also ein weit verbreiteter Irrtum davon auszugehen, dass das BACHsche "wohl-temperierte Clavier" für gleichstufig temperierte Stimmung geschrieben ist. Das wird u.a. aus dem Durchgang durch alle 24 Tonarten abgeleitet, hätte aber BACH sicherlich dazu veranlasst, nur in zwei Tonarten zu komponieren (Dur, Moll), da alles andere durch Transponieren bei unveränderter Charakteristik zu erreichen gewesen wäre. Im übrigen hätte er dann auch seine Musik sicher nicht mit dem Wort "chromatisch" belegt.

Auch WERCKMEISTER schlägt in seiner Ablehnung der gleichstufigen Stimmung vor: "In-deßen bin ich doch nicht ungeneigt / und bleibe dabey / dass man die diatonischen Tertien etwas reiner laße / als die andern so man selten gebraucht / es giebet auch gute Veränderung." - also "möglichst" reine Groß- Terzen der Zentrumstonart bei gleichzeitiger Brauchbarkeit aller Intervalle für sämtliche 24 Tonarten und Erhalt der Chromatik. Daraus leitet sich seine "wohl-temperierte" Stimmung wie folgt ab:

zwei gleiche, fast reine Terzen (392 Cent)

F-A, C-E;

drei gleiche, leicht überschwebende Terzen (397 Cent)

G-H, D-F[#], B^b-D;

vier stärker überschwebende Terzen (≈ 402 Cent)

E^b-G, A-C[#], E-G[#], H-D[#];

drei pythagoreische Terzen (408 Cent)

F[#]-A[#], C[#]-F, G[#]-C.

Die sich damit ergebenden Quinten

C-G, G-D, D-A, H-F[#]

sind schwach verkleinerte Quinten (696 Cent); alle übrigen acht Quinten sind reine (!) Quinten (702 Cent) (vgl. Tab. 10).

Die BACHsche "wohl-temperierte" Stimmung unterscheidet sich von der WERCKMEISTER- Stimmung um weniger als sie von allen anderen Stimmungen abweicht. Sie hat alle Vorzüge der WERCKMEISTER- Stimmung, vermindert aber ihre Schwächen.

Ein mathematisches Bildungsgesetz kann für wohl-temperierte Stimmungen nicht mehr generell angegeben werden. BACH setzt die Stimmung wie folgt zusammen:

sechs reine Quinten (702 Cent)

$$G^b-D^b, D^b-A^b, A^b-E^b, E^b-B^b, B^b-F, F-C$$

(stimmbar in umgekehrter Reihenfolge) sowie eine weitere reine Quint: E - H, die zunächst mit den bereits definierten Tönen noch nicht in Verbindung steht. Das restliche komplementäre Intervall (7 Oktaven minus 7 reine Quinten), also

$$7 - (1200 - 702) = 3486 \text{ Cent}$$

wird auf die verbleibenden 5 Quinten aufgeteilt. Das ergibt fünf mäßig temperierte Quinten von der Größe

$$\frac{3486}{5} = 697.2 \text{ Cent (BACH-Quint)}$$

für

C-G, G-D, D-A, A-H und H-F[#].

Die BACH- Quint ist damit "reiner" als die WERCKMEISTER- Quint und entspricht praktisch der Quint der Mitteltönigkeit. Die sieben reinen Quinten bedeuten eine

WOHL-TEMPERIERT (WERCKMEISTER)

Tabelle 10

	Intervall	Cent	C-Diff/Temp
C		1.0000	0
C+		1.0534	90
D-		1.0534	90
D		1.1180	193
D+		1.1851	294
E-		1.1851	294
E		1.2538	392
E+		---	---
F-		---	---
F		1.3333	498
F+		1.4046	588
G-		1.4046	588
G		1.4953	697
G+		1.5802	792
A-		1.5802	792
A		1.6718	890
A+		1.7777	996
H-		1.7777	996
H		1.8808	1094
H+		---	---
C-		---	---
C		2.0000	1200

WOHL-TEMPERIERT (J.S. BACH)

Tabelle 11

	Intervall	Cent	C-Diff/Temp
C	1.0000	0	0
C+	1.0534	90	-10
D-	1.0534	90	-10
D	1.1188	194	-6
D+	1.1851	294	-6
E-	1.1851	294	-6
E	1.2518	389	-11
E+	---	---	-
F-	---	---	-
F	1.3333	498	-2
F+	1.4044	588	-12
G-	1.4044	588	-12
G	1.4959	697	-3
G+	1.5801	792	-8
A-	1.5801	792	-8
A	1.6737	892	-8
A+	1.7777	996	-4
H-	1.7777	996	-4
H	1.8777	1091	-9
H+	---	---	-
C-	---	---	-
C	2.0000	1200	0

verhältnismäßig gute Stimbarkeit des Instruments und sichern zusammen mit den 5 BACH-Quinten eine Chromatik. Von den sich daraus ergebenden Terzen ist jedoch keine eine reine Terz (386 Cent), sondern die beste ist das Intervall C-E mit 389 Cent; alle anderen Terzen sind größer und unterschiedlich - die größten sind die Intervalle, die durch jeweils vier reine Quinten bestimmt werden, also G^b-B^b , D^b-F , A^b-C - sie sind mit 408 Cent pythagoreische Terzen, also die maximal musikalisch brauchbaren Grobterzen. Sämtliche Töne der BACH-Stimmung liegen bei gleichem Zentrum mehr oder weniger (aber stets) tiefer(!) als die entsprechenden Töne der gleichstufig temperierten Stimmung (negative Cent- Differenzen). Diese wohl-temperierte Stimmung von J.S. BACH mit der ihr eigenen Tonartcharakteristik für alle 24 Tonarten ist eine herausragende Leistung und verdient eine größere Beachtung auch in unserer Zeit und dabei nicht nur für die Werke des Barock.

6.3 WOHL-TEMPERIERT (NEU)

Abschließend sei erlaubt - quasi als eigener Vorschlag zur Stimmungs- Problematik - eine weitere (wohl)-temperierte Stimmung vorzuschlagen, die die Maximen und Kriterien aller beschriebenen Stimmungen berücksichtigt und die Schwächen manch anderer Stimmungen überwindet:

Fasst man die Stimmungsreihe nämlich als ein Optimierungs-Problem auf, bei dem man versucht, möglichst viele reine Quinten und möglichst viele reine Terzen in die Periodizität des Zirkels der 12 Töne hineinzulegen, ohne eine der Nebenbedingungen als Folge der folgenden Kriterien zu verletzen:

1. 12 Quinten ergeben 7 Oktaven (2^7)
2. 4 Quinten rektaviert ergeben 1 Terz
3. Es darf kein "Komma" irgendwelcher Art auftreten und es soll keine Wolfsintervalle geben

4. Keine temperierte Quinte darf kleiner sein als die Komplementär-Quinte. Hierunter sei diejenige verstanden, die für das Restintervall zu 2 reinen Quinten unter Beachtung von Kriterium 2. verbleibt, also

$$q = \sqrt{\frac{5}{(1.5)^2}} = \sqrt{\frac{5}{2.25}} = 1.4907 = 691 \text{ Cent}$$

5. Keine temperierte Quinte darf größer sein als die reine Quinte (702 Cent)
6. Keine temperierte Terz darf kleiner sein als die reine Terz (386 Cent)
7. Keine temperierte Terz darf größer sein als die pythagoreische Terz (408 Cent)
8. Die Zentrumstonarten sollen möglichst reine Intervalle haben
9. Der Ganzton soll möglichst der mitteltönige sein, also z.B. D soll (genau) zwischen C und E liegen
10. Chromatik soll nicht der Gleichstufigkeit geopfert werden

In der Tat hat dieses Optimierungsproblem mit seinen zahlreichen Nebenbedingungen eine Lösung. In Tab. 12 ist die Stimmungsreihe und in Bild 5 der Quint- und Terz-Zustand dargestellt.

Man erkennt, dass drei reine Terzen für die Zentrumstonarten in Form von

$$C-E, G-H, F-A \quad (386 \text{ Cent})$$

eine "fast" reine Terz (schwach überschwebend) für

$$D-F^\# \quad (395 \text{ Cent})$$

und andererseits keine größere Terz als die pythagoreische, z.B. in Form von

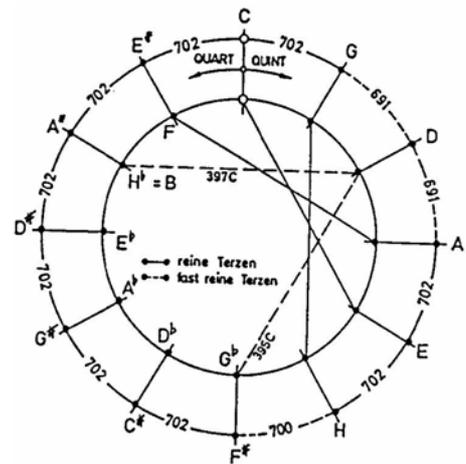
$$A^b-C \quad (408 \text{ Cent})$$

auftreten. Die Terzen $A-C^\#$, $E-G^\#$ und $H-D^\#$ liegen mit 406 Cent unter der pythagoreischen Terz.

Für die Quinten ergeben sich sogar insgesamt neun reine Intervalle (702 Cent)

$$C-G, A-E, E-H, F^\#-C^\#$$

$$D^b-A^b, A^b-E^b, E^b-B^b, B^b-F, F-C$$



WOHL-TEMPERIERT (NEU)

Tabelle 12

	Intervall	Cent	C-Diff/Temp
C	1.0000	0	0
C+	1.0534	90	-10
D-	1.0534	90	-10
D	1.1179	193	-7
D+	1.1851	294	-6
E-	1.1851	294	-6
E	1.2500	386	-14
E+	---	---	-
F-	---	---	-
F	1.3333	498	-2
F+	1.4044	588	-12
G-	1.4044	588	-12
G	1.5000	702	2
G+	1.5801	792	-8
A-	1.5801	792	-8
A	1.6663	884	-16
A+	1.7777	996	-4
H-	1.7777	996	-4
H	1.8747	1088	-12
H+	---	---	-
C-	---	---	-
C	2.0000	1200	0

Die restlichen drei Quinten teilen sich auf in zwei temperierte "Komplementär"- Quinten G-D, D-A mit 691 Cent (verringerte BACH- Quinte) und eine "fast" reine Quint H-F[#] mit 700 Cent. Die beiden schwächeren Quinten G-D und D-A werden bei Verwendung der Dur- Akkorde von der reinen G-H- Terz bzw. fast reinen D-F[#]- Terz dominiert.

F-Dur, C-Dur und G-Dur sind vollständig reine Harmonien; D-Dur enthält ein quasi reines Terz-Intervall; A-Dur, E-Dur und sämtliche b-Tonarten (einschl. G^b) enthalten ein reines Quint-Intervall. Die Gleichheit der Ganztöne ist für alle "schwarzen" Tasten gewahrt und auch das "D" liegt mit 193 Cent genau zwischen C (0 Cent) und E (386 Cent). Der Zirkel ist geschlossen - es gibt kein Komma und keine Wolfsintervalle - die Stimmung ist temperiert wie die BACH- Stimmung, hat aber fast so viele reine Quinten wie die pythagoreische, sie hat zahlreiche gleiche Ganztöne wie die mitteltönige Stimmung und schließlich auch mehrere reine Terzen wie die reine Stimmung - sozusagen ist eben manches "reine" Stimmungssache.

Berlin, im August 1988

dem Kraben
mit freundlicher
Grüße überreicht
vom Oelbauer

Zürich 1.1.89